



Vorkurs Mathematik

- Inhalte und Literaturangaben
- Foliensammlung
- Aufgabensammlung
- Lösungen zu den Aufgaben

Inhalte des Brückenkurs Mathematik in der Vorkurswoche

1. Zahlensysteme und elementare Rechenregeln
2. Anwendung Distributivgesetz
3. Bruchrechnen (incl. Bruchterme)
4. Potenzen mit natürlichen, ganzzahligen und rationalen sowie gebrochen rationalen Exponenten (Wurzeln)
5. Logarithmen
6. Gleichungen
 - 6.1 Lineare Gleichungen
 - 6.2 Quadratische Gleichungen
 - 6.3 Gleichungen höheren Grades (>2)
 - 6.4 Wurzelgleichungen
 - 6.5 Logarithmengleichungen
 - 6.6 Exponentialgleichungen
7. Ungleichungen
8. Lineare Gleichungssysteme (2 Unbekannte)
9. Elementare Finanzmathematik

Zu empfehlende Literatur: Brückenkurs Mathematik

1. Arrenberg, Kiy, Knobloch, Lange: Vorkurs in Mathematik; Managementwissen für Studium und Praxis, Oldenbourg Verlag: München, Wien 2000.
2. Bosch, Karl: Brückenkurs Mathematik; Oldenbourg Verlag; München, Wien 1998, 7. Auflage.
3. Bosch: Übungs- und Arbeitsbuch – Mathematik für Ökonomen, Oldenbourg Verlag: München, Wien 1996, 5. Auflage.
4. Kusch, Lothar: Mathematik 1, Arithmetik und Algebra; Cornelsen Verlag, Berlin 2000, 15. Auflage und zugehöriges Lösungsbuch.
5. Gerlach, Silvio: Rechentrainer „Schlag auf Schlag – bis ich’s mag“ in der Reihe Studeo: Erfolg durch Wissen, Berlin 2004, Zahlreiche Aufgaben mit detaillierten Lösungswegen

Internet:

1. <http://www.mathe-online.at/mathint.html>
Multimediale Lernhilfen zum Mathematik-Stoff für Schule, Fachhochschule und Universität.
[Mathematische Hintergründe](#) und [Lexikon](#), [Interaktive Tests](#)
[Mathe-Links und Online-Werkzeuge](#)
2. SMART (<http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/gym/index.html>)
Aufgabensammlung (mit Lösungen), nach Jahrgangsstufen und Themen sortiert.

Foliensammlung

Aufbau des Zahlensystems

1. **Die Natürlichen Zahlen** \mathbb{N} : {1,2,3,4.....}

2. **Die ganzen Zahlen** \mathbb{Z} : {..., -1, -2, 0, 1, 2,}

3. **Die Rationalen Zahlen** \mathbb{Q} :

Neben \mathbb{N} und \mathbb{Z} enthalten die Rationalen Zahlen \mathbb{Q} alle Brüche sowie alle Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder unendlich vielen Nachkommastellen, die einem Bildungsgesetz folgen Beispiel:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots = \overline{0,3}$$

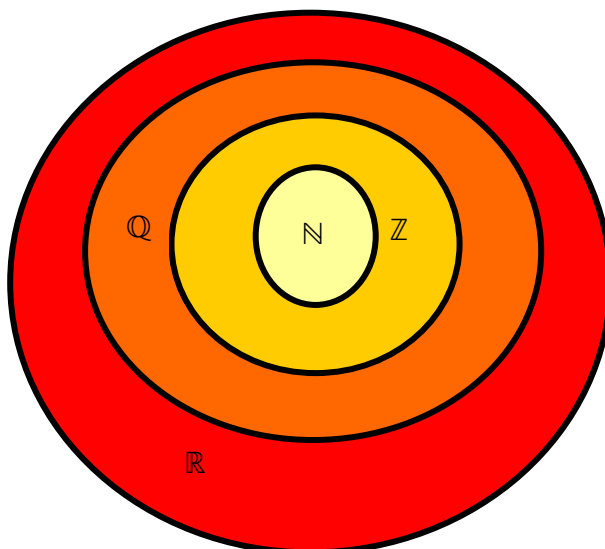
$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{16}{19} = 0,1616 \dots = \overline{0,16}$$

4. **Die Reellen Zahlen** \mathbb{R} :

beinhalten die Rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die Irrationalen Zahlen, wie z.B die Zahl $\pi = 3,141592654\dots$ (zur Bestimmung des Kreisumfangs) oder $e=2,718281$ (Beschreibung von Wachstumsprozessen) und $\sqrt{2} := 2,828427\dots$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Die wichtigsten Regeln für das Rechnen mit Zahlen (Termen)

	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Kommutativgesetz:	$a+b = b+a$ $T_1+T_2 = T_2 + T_1$	gilt nicht	$a \cdot b = b \cdot a$ $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$	gilt nicht
Assoziativgesetz:	$a+(b+c) = (a+b)+c$ $T_1+(T_2 + T_3) = T_1 +(T_2 + T_3)$	gilt nicht	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3) = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$	gilt nicht
Neutrales Element	$a+0 = a$	$a-0 = a$	$a \cdot 1 = a$	$a:1 = a$
Inverses Element	$a+(-a) = 0$	$a-a = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$ $a^{-1} = 1/a$	$a:a^{-1} = 1$ $a^{-1} = a$ Da für die Zahl Null kein inverses Element existiert, darf auch nicht durch Null dividiert werden
Distributivgesetz:	$a \cdot (b+c) = ab + ac$		$a \cdot (b-c) = ab - ac$	
	$T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$		$T_1 \cdot (T_2 - T_3) = T_1 \cdot T_2 - T_1 \cdot T_3$	
	Verknüpfung von Addition bzw. Subtraktion mit der Multiplikation			

Termbegriff:

1. Zahlzeichen:
2. Kombination von Zahlzeichen und Operationszeichen:
3. Terme mit Klammern:
4. Terme mit Variablen:

- Bsp.: $T_1 = 5$
 Bsp.: $T_2 = 2+3$; $T_3 = 2 \cdot 3$
 Bsp.: $T_4 = 2 \cdot (3+4)$
 Bsp. : $T_5(x) = 2 \cdot x$; $T_6 = 2 \cdot (x+1)$; $T_7(x,y) = x+x \cdot y$ Das

Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz gelten auch für Termumformungen

Regeln für das Rechnen mit Brüchen

Die Division durch 0 ist nicht definiert. Für alle $a, b, c, d \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$1. \quad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

**Addition/Subtraktion gleichnamiger
Brüche**

$$2. \quad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{c \cdot d}$$

**Addition/Subtraktion nicht
gleichnamiger Brüche (auf gleichen
Nenner bringen)**

$$3. \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation von Brüchen

$$4. \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Division von Brüchen

Beispiel (Aufgabenblatt 2b):

$$\frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$

$$\frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{(-1) \cdot b}{(-1) \cdot (b-a)} =$$

Der dritte Bruchterm wird mit (-1) erweitert

$$\frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{-b}{-b+a} =$$

$$\frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} - \frac{b}{a-b} =$$

Kommutativgesetz: $-b+a = a-b$ und $+(-b) = -b$

$$\frac{(x+b) - (y-a) - b}{a-b} =$$

Anwendung der Additionsregel für Brüchen mit
gleichem Nenner (Beachte Minuszeichen vor

$$\frac{x+b-y+a-b}{a-b} =$$

$$\frac{x-y+a}{a-b}$$

Potenzen mit ganzzahligem Exponent

Definitionen der Potenzrechnung:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{für } a \neq 0$$

Regeln der Potenzrechnung:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis**
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$ **Division von Potenzen mit gleicher Basis**
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent**
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ **Division von Potenzen mit gleichem Exponenten**
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$ **Potenzieren von Potenzen**

Beispiele:

$$3^{-2} \cdot 3^4 = 3^{-2+4} = 3^2$$

$$5^6 \div 5^4 = 5^{6-4} = 5^2$$

$$(2 \cdot 5)^{-2} = 2^{-2} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4 \cdot 25}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3}$$

$$(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$$

Wurzeln und Potenzen mit rationalen Exponenten

Definitionen:

1. Die nichtnegative Lösung x von $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}_0^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ heißt die Quadratwurzel $\sqrt[2]{a}$ (auch \sqrt{a}). Man schreibt auch: $x = \sqrt{a} = a^{1/2}$.
2. Die nichtnegative Lösung $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt die n -te Wurzel $\sqrt[n]{a}$. Man schreibt auch: $x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Die Wurzel $\sqrt[n]{a^m}$ ist die nichtnegative Lösung x von $x^n = a^m$, $a \in \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Man schreibt auch: $x = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Aus diesen Definitionen ergibt sich, dass die Rechenregeln für Potenzen auch für Wurzeln angewendet werden können:

Regeln für Wurzeln:

$$1. \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[m]{a^s} = a^{r/n} \cdot a^{s/m} = a^{r/n + s/m}$$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$2. \sqrt[n]{a^r} \div \sqrt[m]{a^s} = a^{r/n} \div a^{s/m} = a^{r/n - s/m}$$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$3. \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[n]{b^r} = a^{r/n} \cdot b^{r/n} = (a \cdot b)^{r/n} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^r}$$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponent

$$4. \sqrt[n]{a^r} \div \sqrt[n]{b^r} = a^{r/n} \div b^{r/n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{r/n} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^r}$$

Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

$$5. \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^s} = \left(a^{r/n}\right)^{s/m} = a^{r \cdot s / (n \cdot m)} = \sqrt[n \cdot m]{a^{r \cdot s}}$$

Potenzieren von Potenzen

Beispiele:

$$\sqrt[3]{8^2} \cdot \sqrt{8} = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = 8^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{8^7}$$

$$\sqrt[3]{8^4} \div \sqrt[3]{8^5} = 8^{\frac{4}{3}} \div 8^{\frac{5}{3}} = 8^{\frac{4}{3} - \frac{5}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt[3]{3^2} \div \sqrt[3]{24^2} = 3^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{24}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1^2}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{64^{\frac{1}{2}}} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32, \text{ da gilt: } \sqrt[3]{8^5} = (8^5)^{\frac{1}{3}} = 8^{5 \cdot \frac{1}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5$$

Soll aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden, so darf man auch erst die Wurzel aus der Basis ziehen und dann potenzieren!

Logarithmengesetze:

1. $\log_a (u \cdot v) = \log_a (u) + \log_a (v)$

Beispiel:

$$\log_5 (5 \cdot 125) = \log_5 (625) = 4 \quad \text{und} \quad \log_5 (5) + \log_5 (125) = 1 + 3 = 4$$

2. $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a (u) - \log_a (v)$

Beispiel:

$$\log_5 \left(\frac{125}{5} \right) = \log_5 25 = 2 \quad \text{und} \quad \log_5 125 - \log_5 5 = 3 - 1 = 2$$

3. $\log_a (u^r) = r \cdot \log_a (u)$

Beispiel:

$$\log_5 (125^2) = 2 \cdot \log_5 125 = 2 \cdot 3 = 6$$

4. $\log_a \sqrt[r]{u} = \frac{1}{r} \log_a u$

Beispiel:

$$\log_5 \sqrt[6]{25} = 1/6 \log_5 25 = 1/6 \cdot 2 = 1/3$$

Des Weiteren gilt:

5. $\log_a 1 = 0$

6. $\log_a a = 1$

7. $a^{\log_a b} = b$

1. Teil Aufgabensammlung

Aufgaben zur Anwendung des Distributivgesetzes

1. Multiplizieren von Summentermen

a) $4x \cdot (3a + 6b)$ b) $(5a + b - 4c) \cdot 5x$ c) $(-x + 1,6y) \cdot (-5)$

d) $(3a + 7 - b) \cdot (-c)$ e) $7x \cdot (2a - 3b - 4c) \cdot 2x$

f) $(4a - 5x) \cdot (5c + 4b) \cdot 4n$ g) $(3a - 2b) \cdot (2c - 4d) \cdot (5x - 2y)$

2. Zerlegen in Faktoren (Ausklammern)

a) $ax - 4az + 5ay$ b) $am + bm - cm + xm$ c) $(b - c) \cdot z + b - c$

d) $2ax + ay + az - 2bx - by - bz$ e) $(4a - 2b) \cdot (x + y) - (3a + 4b) \cdot (x + y)$

f) $axnd - axnc + abnd - abnc$

3. Verwandeln Sie in einen Produktterm

a) $57xy + 19ax - 38xz$ b) $6x(2a - 3b) - 5y(2a - 3b) - 4x(2a - 3b)$

c) $(2a + 3b) \cdot (4 - y) - (2a + 3b) \cdot (3y + 5)$ d) $xz - x - yz + y - z + 1$

Aufgaben zum Rechnen mit Brüchen

1. Kürzen Sie:

$$a) \frac{34ax - 6bx}{51ay - 9by}$$

$$b) \frac{-x + 2y}{-2y + x}$$

$$c) \frac{42ab^2c}{22a^2bc}$$

$$d) \frac{2ux - 4vx - 4yu + 8yv + 6zu - 12zv}{-2ux + 4vx + 2yu - 4yv - 6zu + 12zv}$$

2. Berechnen Sie:

$$a) \frac{5}{11} - \frac{2}{11} + \frac{7}{-11} - \frac{-15}{11}$$

$$b) \frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$

$$c) \frac{7ab}{9cx} \div \frac{63bx}{5ac}$$

$$d) 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{28}$$

3. Vereinfachen Sie:

$$a) \left(\frac{a}{4x} - \frac{b}{3x} + \frac{2c}{3x} \right) \cdot \frac{24x}{3a - 4b + 8c}$$

$$b) \frac{2x+5}{2x+3} - \frac{5x-3}{5x-7}$$

$$c) \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{7}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{5}}$$

$$d) \frac{x}{1 - \frac{1}{1-x}}$$

Aufgaben zu Potenzen mit ganzzahligem Exponent

1. Vereinfachen Sie:

a) $(-x^2)^3$

b) $(x^2)^{-3}$

c) $(-2)^{11} \cdot (-\frac{1}{2})^{12}$

d) $4^x \cdot (3\frac{1}{2})^x$

e) $\frac{2^4 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot z^8}{4 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^{10}} \div \frac{2x^2 \cdot y^5 \cdot z^8}{5x^4 \cdot y^3 \cdot z^5}$

f) $\left(\frac{7}{4} x^{2m+3} - \frac{3}{2} x^{2m-3} + \frac{4}{5} x^{m+4} \right) \div \frac{3}{4} x^{2m+1}$

2. Sind folgende Aussagen wahr?

a) $(x^2 + y^2) = (x + y)^2$

b) $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

a) $3x^{-2} = \frac{1}{3x^2}$

Aufgaben zu Potenzen mit rationalem Exponent (Wurzeln)

1. Vereinfachen Sie:

a) $\sqrt[5]{x^{15}}$

b) $\sqrt[4]{x^8 \cdot z^{20}}$

c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}$

d) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$

e) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^2}}$

2. Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

b) $(\sqrt{2} \cdot \sqrt[2]{2^2})^6$

c) $\left(\frac{4x^8}{25y^{16}} \right)^{\frac{1}{2}}$

Aufgaben zum Logarithmus

1. Berechnen Sie folgende Logarithmen

a) $\log_5 25$

b) $\lg \sqrt{10}$

c) $\log_2(8 \cdot 4)$

d) $\log_2 \frac{1}{4}$

e) $\lg 10^{\sqrt{2}}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 0,5$

2. Schreiben Sie als Summen oder/und Differenzen

a) $\lg \frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}}$

b) $\lg \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y}}{\sqrt[3]{10}} \right)^{10}$

3. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen

a) $2 \lg u + 3 \lg v$

b) $\lg x^2 + \frac{1}{3} \lg y - \frac{2}{5} \lg z$

c) $\lg(u + v) + \lg(u + v)^2 - \frac{1}{2} \lg u - \frac{1}{3} \lg v$

Aufgaben zu linearen Gleichungen

Aufgabe 1

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an!
Bestimmen Sie zunächst die Grundmenge G!

a) $2(x - 1) + 3(4x - 3) = 5x$

b) $\frac{2}{x-2} = \frac{5}{x+4}$

c) $(x + 2)(x - 3) = (x + 1)(x - 5)$

d) $(x + 4)(10 + 2x) = 2x(x + 5) + 4(2x + 10)$

e) $\frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{16}{x^2-9}$

f) $\frac{17+4x}{10} - \frac{7+x}{5} = \frac{7x+13}{25} - \frac{5+x}{20}$

g) $\frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$

h) $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$

Aufgabe 2

Die Differenz aus dem Sechsfachen einer Zahl und 5, dividiert durch die Summe aus dem Vierfachen dieser Zahl und 5 ist 1. Wie lautet diese Zahl?

Aufgabe 3

Zerlegen Sie 25 so in zwei Zahlen, dass die Differenz ihrer Quadrate 125 ergibt.

Aufgaben zu quadratischen Gleichungen, Gleichungen höheren Grades und Wurzelgleichungen

Geben Sie bitte immer die Grund – und Lösungsmenge an!

Aufgabe 1

- a) $16x^2 - 81 = 0$ b) $x^2 + 5x = 0$ c) $3x^2 - 18x + 26 = 0$
d) $16x^2 - 40x - 55 = 0$ e) $100x^2 - 40x - 357 = 0$

Aufgabe 2

- a) $\sqrt{8x-7} + 3 = 2x$ b) $4 - \sqrt{4-2x} = 2x$
c) $x - \sqrt{6-2x} = 3$

Aufgabe 3

- a) $\frac{2x+8}{2x-4} = \frac{7x+4}{4x-2}$ b) $\frac{4}{x-6} + \frac{16}{x+8} = 3$
c) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{3}{x+3} = 1 - \frac{3}{(x+2)(x+3)}$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie durch geeignete Substitution alle Lösungen der Gleichungen

- a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ b) $\left(\frac{x+3}{2x-6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x+3}{2x-6} - 3 = 0$
c) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ d) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Polynome. Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen folgender Gleichungen:

- a) $x^3 = 10 - 9x$ b) $t^4 - 4t^3 - 2t^2 - 20t + 25 = 0$

$$c) x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

Aufgabe 6

Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus:

$$a) (x^3 + 2x^2 - 17x + 6) : (x - 3)$$

$$b) (2x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x - 1)$$

$$c) (2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) : (x + 4)$$

Aufgaben zu Logarithmen- und Exponentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden logarithmischen Gleichungen.

$$a) (\lg x)^2 + \lg x = 6 \quad b) (\lg x)^2 - (\lg x^2) + 1 = 0 \quad c) (\lg x)^2 - \lg \sqrt{x} = \lg x + 1$$

$$d) \lg(x^{\lg x}) + 3\lg x = \lg(x^3) + 1 \quad e) \lg(3x - 2) + 1 = 0$$

$$f) \log_2 x + \log_2 5 = 1 + \log_2(1 + x^2) \quad g) 200 = 50 * e^{0,1n}$$

Aufgabe 2

Die Weltbevölkerung im Jahr 2003 beträgt 6,3 Mrd. Sie wächst exponentiell pro Jahr mit einer Wachstumsrate von 1,2%, d.h. nach n Jahren ist sie auf den Wert $6,3 \cdot e^{0,012n}$ angewachsen.

Berechnen Sie, wann die Weltbevölkerung in etwa 8,5 Milliarden beträgt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

$$a) 7^{2x+5} = 5.000 \quad b) 16^{(x^2)} = 2 \quad c) 27^{2x-1} = 9^{2x+1} \quad d) 125^{\sqrt{x-1}} = 5^{\sqrt{4x-5}}$$

$$e) 4^{x+1} + 4^{x-2}$$

Aufgaben lineare Ungleichungen

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden linearen Ungleichungen. Geben Sie Grund- und Lösungsmenge an.

a) $2x + 3(x + 2) > 6x + 3$

b) $\frac{2-3x}{4x+5} > 0,5$

c) $3(2x + 4) \leq 6x + 12$

d) $\frac{8x-5}{5} \leq \frac{2x+5}{3}$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$

Aufgabe 2

Für ein Gut ergeben sich die Kosten K in Abhängigkeit der Produktionsmenge x durch:

Fixe Kosten = 180 GE (Geldeinheiten)

Variable Kosten = 5 GE

Auf dem Markt wird ein Preis von 10 GE erzielt für das Gut.

Ab welcher Absatzmenge erzielt das Unternehmen Gewinn?

Aufgabe 3

Bei der DB gelten folgende Preise:

1. 0,34€ pro Kilometer oder
2. bei Besitz einer Bahn Card , Preis: 100 €, beträgt der Preis pro Kilometer 0,17 €.

Ab welcher Strecke ist es günstiger, sich vor Beginn der Zugreise eine Bahn Card zu kaufen?

Aufgaben Lineare Gleichungssysteme

1. Lösen Sie mit Hilfe der Einsetzungsmethode

a) $g_1: 4x - 5y = 8$

$g_2: -5x + 6,25y = 4$

b) $g_1: x + y = 3$

$g_2: 2x - 2y = 14$

2. Lösen Sie mit Hilfe der Additionsmethode

a) $g_1: x - 2y = 7$

$g_2: 2x + 2y = 2$

b) $g_1: 2x + 3y = 1$

$g_2: 3x + 5y = 3$

3. Lösen Sie mit Hilfe der Gleichsetzungsmethode

a) $g_1: 8x - 6y = 5$

$g_2: 10x - 7,5y = 8$

b) $g_1: 4x + 6y = 8$

$g_2: 5x + 7,5y = 10$

4. Lösen Sie graphisch

$g_1: 2x + 5y = 2$

und

$g_2: 3x - 5y = 3$

Aufgabe 5

Bei der Safterstellung werden 2 Arten von Säften gemischt. Nimmt man 3 Flaschen vom ersten und 7 Flaschen vom zweiten, errechnet sich der Preis einer Flasche zu 2,- Euro. Mischt man aber umgekehrt 7 Flaschen der ersten Saftart und 3 Flaschen der zweiten, kostet eine Flasche 2,20 Euro. Wieviel kostet eine Flasche der verwendeten Säfte?

Aufgaben elementare Finanzmathematik

Aufgabe 1

Herr K. hat Geld bei der Bank XY angelegt. Nach 5 Jahren beträgt sein Guthaben 14.140,00 €. Nach weiteren 3 Jahren beträgt es 17.567,00 €.

- a) Welchen Zinssatz erhält er?
- b) Wie viel Geld hat Herr K. damals angelegt

Aufgabe 2

Bei einer Bank werden 37.100 € angelegt. Nach 8 Jahren werden sie auf 53.983,84 € angewachsen sein. Geben Sie die Exponentialfunktion an, die das Anwachsen der Spareinlage beschreibt.

Wie hoch ist der Zinssatz in Prozent?

Aufgabe 3

Sie legen ein Guthaben zu 4% Zinsen pro Jahr an. Wann hat sich Ihr Guthaben verdreifacht?

Aufgabe 4

Lösen Sie die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ nach n auf.

2. Teil: Lösungen zu den Aufgaben

Lösungen: Aufgaben zur Anwendung des Distributivgesetzes

1. Multiplizieren von Summentermen

a) $4x \cdot (3a + 6b) = 12ax + 24bx$

b) $(5a + b - 4c) \cdot 5x = 25ax + 5bx - 20cx$

c) $(-x + 1,6y) \cdot (-5) = 5x - 8y$

d) $(3a + 7 - b) \cdot (-c) = -3ac - 7c + bc$

e) $7x \cdot (2a - 3b - 4c) \cdot 2x = 14x^2(2a - 3b - 4c) = 28ax^2 - 42bx^2 - 56cx^2$

f)

$(4a - 5x) \cdot (5c + 4b) \cdot 4n = (20ac + 16ab - 25cx - 20bx) \cdot 4n = 80acn + 64abn - 100cnx - 80bnx$

g) $(3a - 2b) \cdot (2c - 4d) \cdot (5x - 2y) = (6ac - 12ad - 4bc + 8bd)(5x - 2y) =$
 $30acx - 12acy - 60adx + 24ady - 20bcx + 8bcy + 40bdx - 16bdy$

2. Zerlegen in Faktoren (Ausklammern)

a) $ax - 4az + 5ay = a(x - 4z + 5y)$

b) $am + bm - cm + xm = m(a + b - c + x)$

c) $(b - c) \cdot z + b - c = (b - c)(z + 1)$

d) $2ax + ay + az - 2bx - by - bz = a(2x + y + z) - b(2x + y + z) =$
 $(2x + y + z)(a - b)$

e) $(4a - 2b) \cdot (x + y) - (3a + 4b) \cdot (x + y) = (x + y)[(4a - 2b) - (3a + 4b)] = (x + y)(a - 6b)$

f) $axnd - axnc + abnd - abnc = ax(nd - nc) + ab(nd - nc) = (nd - nc)(ax + ab) =$
 $n(d - c) \cdot a(x + b) = an(d - c) \cdot (x + b)$

3. Verwandeln Sie in einen Produktterm

a) $57xy + 19ax - 38xz = 19x \cdot (3y + a - 2z)$

b) $6x(2a - 3b) - 5y(2a - 3b) - 4x(2a - 3b) = (2a - 3b) \cdot ((6x - 5y - 4x) =$
 $(2a - 3b) \cdot (2x - 5y)$

c) $(2a + 3b) \cdot (4 - y) - (2a + 3b) \cdot (3y + 5) = (2a + 3b) \cdot [(4 - y) - (3y + 5)] =$
 $(2a + 3b) \cdot (-1 - 4y)$

d) $xz - x - yz + y - z + 1 = x(z - 1) - y(z - 1) - 1(z - 1) = (z - 1) \cdot (x - y - 1)$

Lösungen zu den Aufgaben : Rechnen mit Brüchen

Aufgabe 1

$$a) \quad \frac{34ax - 6bx}{51ay - 9by} = \frac{2x(17a - 3b)}{3y(17a - 3b)} = \frac{2x}{3y}$$

Sowohl im Zähler als auch im Nenner wird das Distributivgesetz angewandt.

Der gemeinsame Faktor (17a - 3b) in Zähler und Nenner kann gekürzt werden.

$$b) \quad \frac{-x + 2y}{-2y + x} = \frac{-1(x - 2y)}{x - 2y} = -1$$

$$c) \quad \frac{42ab^2c}{22a^2bc} = \frac{21b}{11a}$$

Zähler und Nenner sind ein Produkt. Sie lassen sich sofort durch den gemeinsamen Faktor 2abc kürzen.

d)

$$\begin{aligned} & \frac{2ux - 4vx - 4yu + 8yv + 6zu - 12zv}{-2ux + 4vx + 2yu - 4yv - 6zu + 12zv} = \\ & \frac{2x(u - 2v) - 4y(u - 2v) + 6z(u - 2v)}{-2x(u - 2v) + 2y(u - 2v) - 6z(u - 2v)} = \\ & \frac{(u - 2v)(2x - 4y + 6z)}{(u - 2v)(-2x + 2y - 6z)} = \\ & \frac{2x - 4y + 6z}{-2x + 2y - 6z} = \\ & \frac{2(x - 2y + 3z)}{2(-x + y - 3z)} = \frac{x - 2y + 3z}{-x + y - 3z} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$a) \quad \frac{5}{11} - \frac{2}{11} + \frac{7}{-11} - \frac{-15}{11} = \\ \frac{5}{11} - \frac{2}{11} - \frac{7}{11} + \frac{15}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

Der gemeinsame Nenner ist 11.

$$\frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{(-1)b}{(-1)(b-a)} =$$

Der gemeinsame Nenner ist (a-b).

$$b) \quad \frac{x+b}{a-b} - \frac{y-a}{a-b} + \frac{-b}{a-b} = \frac{x+b - (y-a) + (-b)}{a-b} = \\ \frac{x+b - y + a - b}{a-b} = \frac{x - y + a}{a-b}$$

Der 3. Bruchterm muss mit (-1) erweitert werden.

Beachte die Vorzeichen!!!

$$c) \frac{7ab}{9cx} \div \frac{63bx}{5ac} = \frac{7ab}{9cx} * \frac{5ac}{63bx} = \frac{5a^2}{81x^2}$$

Division von Brüchen,
Multiplikation mit dem
Kehrwert

$$d) 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{28} = \frac{7}{4} \cdot \frac{29}{28} = \frac{29}{16}$$

Aufgabe 3

$$a) \left(\frac{a}{4x} - \frac{b}{3x} + \frac{2c}{3x} \right) \cdot \frac{24x}{3a-4b+8c} =$$

$$\left(\frac{3a-4b+8c}{12x} \right) \cdot \frac{24x}{3a-4b+8c} =$$

$$\frac{24x}{12x} = 2$$

Zunächst werden die Brüche in der
Klammer auf einen Nenner
gebracht (12x) und die Zähler
entsprechend erweitert.
Danach lässt sich sofort erkennen,
dass sich der Zähler des ersten
Bruchs mit dem Nenner des
zweiten Bruchs kürzen lässt (
Multiplikation von Brüchen!!)

$$b) \frac{2x+5}{2x+3} - \frac{5x-3}{5x-7} =$$

$$\frac{(5x-7)(2x+5) - (2x+3)(5x-3)}{(2x+3)(5x-7)} =$$

$$\frac{(10x^2 + 25x - 14x - 35) - (10x^2 - 6x + 15x - 9)}{(2x+3)(5x-7)}$$

$$\frac{2x-26}{10x^2 + x - 21}$$

Die beiden Brüche werden
gleichnamig gemacht und
zusammengefasst.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{12}{21} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} =$$

$$c) \frac{26}{21} \cdot \frac{20}{13} = \frac{40}{21}$$

$$d) \frac{x}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x}{\frac{-x}{1-x}} =$$

$$\frac{x(1-x)}{-x} = -1+x = x-1$$

Zunächst den Bruch im Nenner
gleichnamig machen.
Division von Brüchen: Kehrwert
multiplizieren.

Lösungen: Aufgaben zu Potenzen mit ganzzahligem Exponent

Aufgabe 1

$$\text{a) } (-x^2)^3 = -x^{2 \cdot 3} = -x^6 \qquad \text{b) } (x^2)^{-3} = x^{2 \cdot (-3)} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

$$\text{c) } (-2)^{11} \cdot (-\frac{1}{2})^{12} = (-2)^{11} \cdot (-\frac{1^1}{2^1})^{12} = (-2)^{11} \cdot (-2^{-1})^{12} = (-2)^{11} \cdot (-2)^{-12} = (-2)^{11-12} = (-2)^{-1} = (-\frac{1}{2})$$

$$\text{d) } 4^x \cdot (3\frac{1}{2})^x = (4 \cdot 3\frac{1}{2})^x = 14^x$$

$$\text{e) } \frac{2^4 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot z^8}{4 \cdot x^2 \cdot y^5 \cdot z^{10}} \div \frac{2x^2 \cdot y^5 \cdot z^8}{5x^4 \cdot y^3 \cdot z^5} = (2^2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^{-2}) \div \frac{2 \cdot y^2 \cdot z^3}{5x^2} = (2^2 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^{-2}) \cdot \frac{5x^2}{2 \cdot y^2 \cdot z^3} = \frac{20x^5 \cdot y^2 \cdot z^{-2}}{2 \cdot y^2 \cdot z^3} = 10x^5 z^{-5}$$

$$\text{f) } \left(\frac{7}{4} x^{2m+3} - \frac{3}{2} x^{2m-3} + \frac{4}{5} x^{m+4} \right) \div \frac{3}{4} x^{2m+1} = \frac{7x^{2m+3}}{4} \cdot \frac{4}{3x^{2m+1}} - \frac{3x^{2m-3}}{2} \cdot \frac{4}{3x^{2m+1}} + \frac{4x^{m+4}}{5} \cdot \frac{4}{3x^{2m+1}} = \frac{7}{3} x^{2m+3-(2m+1)} - 2x^{2m-3-(2m+1)} + \frac{16}{15} x^{m+4-(2m+1)} = \frac{7}{3} x^2 - 2x^{-4} + \frac{16}{15} x^{-m+3}$$

Aufgabe 2

$$\text{a) } (x^2 + y^2) = (x + y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\text{b) } x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2 \Rightarrow x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2$$

$$\text{c) } 3x^{-2} = \frac{1}{3x^2} \Rightarrow \frac{3}{x^2} \neq \frac{1}{3x^2}$$

Lösungen: Aufgaben Potenzen mit rationalem Exponent und Wurzeln

Aufgabe 1

$$\text{a) } \sqrt[5]{X^{15}} = X^{\frac{15}{5}} = X^3$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{X^8 \cdot Z^{20}} = \sqrt[4]{X^8} \cdot \sqrt[4]{Z^{20}} = X^2 \cdot Z^5$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{a^{13}} = a \cdot \sqrt[12]{a}$$

$$\text{d) } \sqrt{\sqrt[3]{X}} = \left(X^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = X^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{X}$$

$$\text{e) } \sqrt[4]{\sqrt[5]{X^2}} = \left(X^{\frac{2}{5}} \right)^{\frac{1}{4}} = X^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{X}$$

Aufgabe 2

$$\text{a) } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\text{b) } \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} \right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \right)^6 = \left(2^{\frac{7}{6}} \right)^6 = 2^7 = 128$$

$$\text{c) } \left(\frac{4x^8}{25y^{16}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(4x^8)^{\frac{1}{2}}}{(25y^{16})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^4}{5y^8}$$

Lösungen: Aufgaben zum Logarithmus

Aufgabe 1

a) $\log_5 25 = 2$; $5^2 = 25$ b) $\lg \sqrt{10} = \lg 10^{1/2} = 1/2$ c) $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 32 = 5$; $2^5 = 32$
d) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; $2^{-2} = 1/4$ e) $\lg 10^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ f) $\log_{\frac{1}{2}} 0,5 = 1$; $\frac{1}{2}^1 = 0,5$

Aufgabe 2

a) $\lg \frac{\sqrt{a} \cdot b^2}{\sqrt[4]{c}} = \lg \sqrt{a} \cdot b^2 - \lg \sqrt[4]{c} = \lg \sqrt{a} + \lg b^2 - \frac{1}{4} \lg c =$
 $\frac{1}{2} \lg a + 2 \cdot \lg b - \frac{1}{4} \lg c$

b) $\lg \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y}}{\sqrt[3]{10}} \right)^{10} = 10 \lg \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y}}{\sqrt[3]{10}} \right) = 10 (\lg \sqrt{x} \cdot \sqrt[5]{y} - \lg \sqrt[3]{10}) =$
 $10 (\frac{1}{2} \lg x + \frac{1}{5} \lg y - \frac{1}{3} \lg 10) = 5 \lg x + 2 \lg y - 10/3$

Aufgabe 3

a) $2 \lg u + 3 \lg v = \lg(u^2 \cdot v^3)$ b) $\lg x^2 + \frac{1}{3} \lg y - \frac{2}{5} \lg z = \lg \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[5]{z^2}}$
c) $\lg(u+v) + \lg(u+v)^2 - \frac{1}{2} \lg u - \frac{1}{3} \lg v = \lg(u+v) + \lg(u+v)^2 - (\frac{1}{2} \lg u + \frac{1}{3} \lg v)$
 $= \lg((u+v) \cdot (u+v)^2) - (\lg(u^{1/2} \cdot v^{1/3})) = \lg \frac{(u+v)^3}{\sqrt{u} \sqrt[3]{v}}$

Lösungen: Aufgaben Lineare Gleichungen

Aufgabe 1

a) $2(x-1) + 3(4x-3) = 5x$ | Klammern ausmultiplizieren **G = R**
 $2x - 2 + 12x - 9 = 5x$ | Zusammenfassen
 $14x - 11 = 5x$ | +11 - 5x
 $9x = 11$ | : 9
 $x = 11/9$

$$L = \{ 11/9 \}$$

$$b) \frac{2}{x-2} = \frac{5}{x+4} \quad G = \mathbb{R} \setminus \{ -4; 2 \}$$

Begründung: Die Nenner dürfen nicht 0 werden, da die Division durch 0 nicht definiert ist.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{und} \quad x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

1. Schritt: $\frac{2}{x-2} = \frac{5}{x+4}$ | mit dem Hauptnenner $(x-2)(x+4)$
multiplizieren

2. Schritt: $\frac{2(x-2)(x+4)}{x-2} = \frac{5(x-2)(x+4)}{x+4}$

Hinweis: Auf der linken Seite lassen sich Zähler und Nenner durch $(x-2)$ kürzen, auf der rechten Seite durch $(x+4)$. Der Bruch verschwindet!

3. Schritt: $2(x+4) = 5(x-2)$ | Klammern ausmultiplizieren

4. Schritt: $2x + 8 = 5x - 10$ | + 10 - 2x

5. Schritt: $18 = 3x$ | : 3
 $6 = x$

$$L = \{ 6 \}$$

c) $(x+2)(x-3) = (x+1)(x-5)$ | Klammern ausmultiplizieren $G = \mathbb{R}$

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - 5x + x - 5$$
 | zusammenfassen

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 4x - 5$$
 | $-x^2 + 4x + 6$

$$3x = 1$$
 | : 3

$$x = 1/3$$

$$L = \{ 1/3 \}$$

d) $(x+4)(10+2x) = 2x(x+5) + 4(2x+10)$ $G = \mathbb{R}$

$$10x + 2x^2 + 40 + 8x = 2x^2 + 10x + 8x + 40$$

$$2x^2 + 18x + 40 = 2x^2 + 18x + 40$$

$$0 = 0$$

$$L = R$$

$$e) \frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{16}{x^2-9}$$

$$G = R \setminus \{-3; 3\}$$

Hier ist es wichtig zu erkennen, dass es sich bei dem Ausdruck $x^2 - 9$ um den Hauptnenner handelt, da $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$ (3. Binomische Formel!).

$$\frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{16}{x^2-9}$$

| mit dem Hauptnenner ($x^2 - 9$) multiplizieren

$$(x + 3) + 4(x - 3) = 16$$

| Klammer ausmultiplizieren

$$x + 3 + 4x - 12 = 16$$

| zusammenfassen

$$5x - 9 = 16$$

| + 9

$$5x = 25$$

| : 5

$$x = 5$$

$$L = \{5\}$$

$$f) \frac{17+4x}{10} - \frac{7+x}{5} = \frac{7x+13}{25} - \frac{5+x}{20}$$

| mit HN 100 multiplizieren **G**

$$= R$$

$$10(17 + 4x) - 20(7 + x) = 4(7x + 13) - 5(5 + x) \quad | \text{ Klammern ausmultiplizieren}$$

$$170 + 40x - 140 - 20x = 28x + 52 - 25 - 5x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$30 + 20x = 23x + 27 \quad | -27 - 20x$$

$$3 = 3x \quad | : 3$$

$$1 = x$$

$$L = \{1\}$$

$$g) \frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$$

$$G = R \setminus \{-1/3\}$$

$$\frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$$

| mit dem Hauptnenner ($12x + 4$)

multiplizieren ; $12x + 4 = 4(3x + 1)$

$$x + 4 - 4(x - 4) = 5(12x + 4) \quad | \text{Klammer ausmultiplizieren}$$

$$x + 4 - 4x + 16 = 60x + 20 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$-3x + 20 = 60x + 20 \quad | -20 + 3x$$

$$0 = 63x \quad | : 63$$

$$0 = x$$

$$\mathbf{L = \{0\}}$$

$$h) \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{G = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$$

| mit dem HN $2 \cdot 3(x-2)$ multiplizieren

$$3x - 6 = 3(x - 2)$$

$$6x - 2(x - 2) = x - 2 \quad | \text{Klammer ausmultiplizieren}$$

$$6x - 2x + 4 = x - 2 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$4x + 4 = x - 2 \quad | -x - 4$$

$$3x = -6 \quad | : 3$$

$$x = -2$$

$$\mathbf{L = \{-2\}}$$

Aufgabe 2

x die gesuchte Zahl

$6x$ Sechsfache der gesuchten Zahl

$6x - 5$ Differenz des Sechsfachen der gesuchten Zahl und 5

$4x$ Vierfache der gesuchten Zahl

$4x + 5$ Summe aus dem Vierfachen der gesuchten Zahl und 5

$(6x - 5) : (4x + 5)$ Differenz dividiert durch Summe

$$\begin{aligned}
 \text{Die gesuchte Gleichung lautet : } (6x - 5) : (4x + 5) &= 1 && | \cdot (4x + 5) \\
 6x - 5 &= 4x + 5 && | -4x + 5 \\
 2x &= 10 && | : 2 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl lautet 5

Aufgabe 3

x	1. Zahl
$25 - x$	2. Zahl
x^2	Quadrat der 1. Zahl
$(25 - x)^2$	Quadrat der 2. Zahl
$x^2 - (25 - x)^2$	Differenz der Quadrate

Die gesuchte Gleichung lautet:

$$\begin{aligned}
 x^2 - (25 - x)^2 &= 125 && | \text{Klammer berechnen} \\
 x^2 - 625 + 50x - x^2 &= 125 && | +625 \\
 50x &= 750 && | :50 \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Die gesuchten Zahlen lauten 15 und 10 (25 - 15).

Lösungen: Aufgaben zu quadratischen Gleichungen, Gleichungen höheren Grades und Wurzelgleichungen

Aufgabe 1

a) $16x^2 - 81 = 0$ **3. Binomische Formel!**

$$(4x - 9)(4x + 9) = 0$$

$$x_1: 4x - 9 = 0$$

$$x_1 = 9/4$$

$$x_2: 4x + 9 = 0$$

$$x_2 = -9/4$$

$$L = \{-9/4; 9/4\}$$

$$b) x^2 + 5x = 0$$

x ausklammern

$$x(x + 5)$$

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -5$$

$$L = \{-5; 0\}$$

$$c) 3x^2 - 18x + 26 = 0 \quad | : 3$$

auf die Normalform bringen

$$x^2 - 6x + 26/3 = 0 \quad | + (6/2)^2$$

quadratische Ergänzung

$$x^2 - 6x + 9 = +9 - 26/3$$

$$(x - 3)^2 = 1/3 \quad | \sqrt{\quad} + 3$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Hier lässt sich auch sofort die p-q Formel anwenden!

$$d) 16x^2 - 40x - 55 = 0 \quad | : 16$$

$$x^2 - 5/2x - 55/16 = 0$$

Anwendung der p-q Formel:

$$x_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{55}{16}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{80}{16}}$$

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5 \cdot 16}}{4} = \frac{5}{4} + \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{4} = \frac{5}{4} + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5 \cdot 16}}{4} = \frac{5}{4} - \sqrt{5}$$

$$e) 100x^2 - 40x - 357 = 0 \quad | : 100$$

$$x^2 - 0,4x - 3,57 = 0$$

$$x_{1/2} = 0,2 \pm \sqrt{0,04 + 3,57}$$

$$x_1 = 0,2 + 1,9 = 2,1$$

$$x_2 = 0,2 - 1,9 = -1,7$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{8x-7} + 3 &= 2x && | -3 \\ \sqrt{8x-7} &= 2x-3 && | ()^2 \\ 8x-7 &= (2x-3)^2 && \\ 8x-7 &= 4x^2 - 12x + 9 && | - 8x + 7 \\ 0 &= 4x^2 - 20x + 16 && | : 4 \\ 0 &= x^2 - 5x + 4 && \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 1$$

Durch Einsetzen der beiden Werte zeigt sich, dass nur x_1 eine Lösung ist.

$$\text{b) } 4 - \sqrt{4-2x} = 2x$$

$$4 - 2x = \sqrt{4-2x}$$

$$(4-2x)^2 = 4-2x$$

$$16 - 16x + 4x^2 = 4 - 2x$$

$$4x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{48}{16}}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Die Probe ergibt, dass x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung sind.

$$\text{c) } x - \sqrt{6-2x} = 3$$

$$\begin{aligned}
x-3 &= \sqrt{6-2x} \\
(x-3)^2 &= 6-2x \\
x^2-6x+9 &= 6-2x \\
x^2-4x+3 &= 0 \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Die Probe zeigt, dass nur $x_1 = 3$ eine Lösung ist.

Aufgabe 3

a)

$$\frac{2x+8}{2x-4} = \frac{7x+4}{4x-2} \quad | \text{ Mit dem Hauptnenner } (x-2)(2x-1) \cdot 2 \text{ malnehmen}$$

$$(2x+8)(2x-1) = (7x+4)(x-2)$$

$$4x^2 - 2x + 16x - 8 = 7x^2 - 14x + 4x - 8$$

$$0 = 3x^2 - 24x$$

$$0 = x^2 - 8x$$

$$0 = x(x-8)$$

$$\mathbf{x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 8}$$

b) $\frac{4}{x-6} + \frac{16}{x+8} = 3 \quad | \text{ HN } (x-6)(x+8)$

$$4(x+8) + 16(x-6) = 3(x-6)(x+8)$$

$$4x + 32 + 16x - 96 = 3x^2 + 24x - 18x - 144$$

$$20x - 64 = 3x^2 + 6x - 144$$

$$0 = 3x^2 - 14x - 80$$

$$0 = x^2 - 14/3x - 80/3$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{80}{3}} = \frac{7}{3} \pm \frac{17}{3}$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = -\frac{10}{3}$$

c) $\frac{x-1}{x+2} + \frac{3}{x+3} = 1 - \frac{3}{(x+2)(x+3)} \quad | \text{ HN } (x+2)(x+3)$

$$(x-1)(x+3) + 3(x+2) = (x+2)(x+3) - 3$$

$$x^2 + 3x - x - 3 + 3x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6 - 3$$

$$x^2 + 5x + 3 = x^2 + 5x + 3$$

$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2; x \neq -3 \}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie durch geeignete Substitution alle Lösungen der Gleichungen

a) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ $\sqrt{x} = u$ **Substitution**

$$u^2 - u - 6 = 0$$

$$u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$u_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad u_1 = -2 \quad \text{und} \quad u_2 = 3$$

Die beiden Lösungen für u einsetzen in die Substitutionsgleichung:

$$1) \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$2) \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x_2 = 9$$

Durch die Probe zeigt sich, dass $X = 4$ keine Lösung ist!

b) $\left(\frac{x+3}{2x-6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x+3}{2x-6} - 3 = 0$ $\left(\frac{x+3}{2x-6}\right) = u$ **Substitution**

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \quad u_1 = 3 \quad \text{und} \quad u_2 = -1$$

$$1) 3 = \frac{x+3}{2x-6} \Rightarrow 6x - 18 = x + 3 \Rightarrow 5x = 21 \Rightarrow x_1 = \frac{21}{5}$$

$$2) -1 = \frac{x+3}{2x-6} \Rightarrow -2x + 6 = x + 3 \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x_2 = 1$$

c) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ $x^2 = u$ **Substitution**

$$u^2 + 5u + 6 = 0$$

$$u_1 = -3 \text{ und } u_2 = -2$$

Es gibt keine Lösung für x

$$d) x^6 + 19x^3 - 216 = 0$$

$x^3 = u$ Substitution

$$u^2 + 19u - 216 = 0$$

$$u_1 = -27 \quad \text{und} \quad u_2 = 8$$

Durch einsetzen der Lösungen für u erhält man: $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Polynome. Ermitteln Sie sämtliche reellen Lösungen folgender Gleichungen:

$$a) \quad x^3 = 10 - 9x$$

Die erste Nullstelle erraten: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{r} (x^3 + \underline{0x^2} + 9x - 10) : (x - 1) = x^2 + x + 10 \\ - \underline{(x^3 - x^2)} \\ \quad x^2 + 9x \\ \quad - \underline{(x^2 - x)} \\ \quad \quad 10x - 10 \\ \quad \quad - \underline{-10} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Die quadratische Gleichung $x^2 + x + 10 = 0$ lässt sich mit der p/q Formel lösen.

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 10} \quad \text{Die Diskriminante ist negativ, d.h. es existieren keine weiteren Nullstellen. } \mathbf{L = \{ 1 \}}$$

$$b) \quad t^4 - 4t^3 - 2t^2 - 20t + 25 = 0$$

Die erste Nullstelle muß erraten werden, $t_1 = 1$.

Durch Polynomdivision $(x - 1)$ erhält man die Gleichung: $t^3 - 3t^2 - 5t - 25 = 0$

Die zweite Nullstelle muß wiederum erraten werden, $t_2 = 5$ und die Division durch $(x - 5)$ ergibt: $t^2 + 2t + 5$.

Durch Anwendung der pq- Formel zeigt sich, dass es keine weiteren Lösungen für x gibt.

$$L = \{ 1, 5 \}$$

- c) $x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ Die erste Nullstelle $x_1 = 2$ muß erraten werden. Die Polynomdivision durch $(x - 2)$ führt auf die quadratische Gleichung : $x^2 - 2 = 0$.

$$x_{2/3} = \pm\sqrt{2}. \quad L = \{ \pm\sqrt{2}, 2 \}$$

Aufgabe 6

Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus:

a) $(x^3 + 2x^2 - 17x + 6) : (x - 3) = x^2 + 5x - 2$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\ +5x^2 - 17x \\ \underline{-(+5x^2 - 15x)} \\ -2x + 6 \\ \underline{-(-2x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

b) $(2x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x - 1) = x^2 - 3x - 2$

$$\begin{array}{r} \underline{-(2x^3 - x^2)} \\ -6x^2 - x \\ \underline{-(-6x^2 + 3x)} \\ -4x + 2 \\ \underline{-(-4x + 2)} \\ 0 \end{array}$$

c) $(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) : (x + 4) = 2x^2 - 6x + 3$

$$\begin{array}{r} \underline{-(2x^3 + 8x^2)} \\ -6x^2 - 21x \\ \underline{-(-6x^2 - 24x)} \\ 3x + 12 \end{array}$$

$$\frac{-(3x+12)}{0}$$

Lösungen zu den Aufgaben : Logarithmen- und Exponentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden logarithmischen Gleichungen.

a) $(\lg x)^2 + \lg x = 6$

Lösen durch Substitution: $u = \lg x$, $u^2 = (\lg x)^2$

$$u^2 + u = 6$$

$$\Rightarrow u^2 + u - 6 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$\Rightarrow = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow u_1 = -3 \quad \text{und} \quad u_2 = 2$$

Ergebnisse einsetzen in $\lg x = u$

$$u_1 = -3 = \lg x \quad \Rightarrow -3 = \lg x \quad \Rightarrow x = 10^{-3} = 0,001$$

$$u_2 = 2 = \lg x \quad \Rightarrow 2 = \lg x \quad \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

b) $(\lg x)^2 - (\lg x^2) + 1 = 0$

Anwenden des 3. Logarithmusgesetzes: $(\lg x)^2 - 2\lg x + 1 = 0$

Lösen durch Substitution: $u = \lg x$, $u^2 = (\lg x)^2$

$$u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$$

$$\Rightarrow u_1 = 1$$

Ergebnis einsetzen in $\lg x = u$

$$u_1 = 1 = \lg x \quad \Rightarrow 1 = \lg x \quad \Rightarrow x = 10^1 = 10$$

c) $(\lg x)^2 - \lg \sqrt{x} = \lg x + 1$ umformen in:

$$(\lg x)^2 - \lg x^{0,5} - \lg x - 1 = 0$$

$$(\lg x)^2 - 1,5 \lg x - 1 = 0$$

Lösen durch Substitution: $u = \lg x$, $u^2 = (\lg x)^2$

$$u^2 - 1,5u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$$

$$\Rightarrow = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow u_1 = -0,5 \quad \text{und} \quad u_2 = 2$$

Ergebnisse einsetzen in $\lg x = u$

$$u_1 = -0,5 = \lg x \quad \Rightarrow -0,5 = \lg x \quad \Rightarrow x = 10^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316$$

$$u_2 = 2 = \lg x \quad \Rightarrow 2 = \lg x \quad \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

d) $\lg(x^{\lg x}) + 3\lg x = \lg(x^3) + 1$ umformen in:

$$\lg x \cdot \lg x + 3\lg x - 3\lg x = 1$$

$$(\lg x)^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\lg x = \pm 1$$

$$x_1 = 10^1 = 10 \quad \text{und} \quad x_2 = 10^{-1} = 0,1$$

f) $\lg(3x - 2) + 1 = 0$ umformen in:

$$\lg(3x - 2) = -1 \quad | \text{zur Basis 10 potenzieren}$$

$$3x - 2 = 10^{-1} = 0,1 \quad | +2$$

$$3x = 2,1 \quad | : 3$$

$$x = 0,7$$

g) $\log_2 x + \log_2 5 = 1 + \log_2 (1 + x^2)$

$$\log_2 x + \log_2 5 - \log_2 (1 + x^2) = 1 \quad \text{Anwenden der Logarithmusgesetze}$$

$$\log_2 5x - \log_2 (1 + x^2) = 1$$

$$\log_2 \frac{5x}{1+x^2} = 1$$

$$\frac{5x}{1+x^2} = 2^1 = 2 \quad | \cdot (1+x^2)$$

$$5x = 2 + 2x^2 \quad | -5x : 2$$

$$0 = x^2 - 2,5x + 1$$

mit p/q Formel lösen!

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$$

$$\Rightarrow = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,5 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

$$h) 200 = 50 \cdot e^{0,1n} \quad | : 50$$

$$4 = e^{0,1n} \quad | \ln$$

$$\ln 4 = \ln e^{0,1n}$$

$$1,386 = 0,1 \cdot n \ln e \quad | \ln e = 1$$

$$1,386 = 0,1 \cdot n \quad | : 0,1$$

$$13,86 = n$$

Aufgabe 2

Die Weltbevölkerung im Jahr 2003 beträgt 6,3 Mrd. Sie wächst exponentiell pro Jahr mit einer Wachstumsrate von 1,2%, d.h. nach n Jahren ist sie auf den Wert $6,3 \cdot e^{0,012n}$ angewachsen.

Berechnen Sie, wann die Weltbevölkerung in etwa 8,5 Milliarden beträgt.

$$6,3 \cdot e^{0,012n} = 8,5 \quad | : 6,3$$

$$e^{0,012n} = 1,35 \quad | \text{Logarithmieren}$$

$$0,012 \cdot n \ln e = \ln 1,35 \quad | \ln e = 1$$

$$0,012 \cdot n = \ln 1,35$$

$$n = \frac{\ln 1,35}{0,012}$$

$$n = 25$$

Im Jahr 2028 wird die Weltbevölkerung in etwa 8,5 Milliarden Einwohner betragen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen.

a) $7^{2x+5} = 5.000$ Logarithmieren zur Basis 10 (lg)
 $\lg(7^{2x+5}) = \lg 5.000$ Anwenden der Logarithmusgesetze
 $(2x + 5) \lg 7 = \lg 5.000 \quad | : \lg 7$
 $2x + 5 = \frac{\lg 5000}{\lg 7} \quad | - 5$
 $2x = \frac{\lg 5000}{\lg 7} - 5$
 $2x = 4,377 - 5 \quad | : 2$
 $x = - 0,311 \dots$

b) $16^{(x^2)} = 2$ Logarithmieren zur Basis 10 (lg)
 $x^2 \lg 16 = \lg 2$
 $x^2 = \frac{\lg 2}{\lg 16}$
 $x_1 = 0,5$ und $x_2 = -0,5$

c) $27^{2x-1} = 9^{2x+1}$ Logarithmieren zur Basis 10 (lg)
 $(2x - 1) \lg 27 = (2x + 1) \lg 9$
 $2x \cdot \lg 27 - \lg 27 = 2x \cdot \lg 9 + \lg 9$
 $2x \cdot \lg 27 - 2x \cdot \lg 9 = \lg 9 + \lg 27$
 $x(2 \cdot \lg 27 - 2 \cdot \lg 9) = 2,385$
 $x = \frac{2,385}{2 \lg 27 - 2 \lg 9} = 2,5$

d) $125^{\sqrt{x-1}} = 5^{\sqrt{4x-5}}$ Logarithmieren

$$\sqrt{x-1} \cdot \lg 125 = \sqrt{4x-5} \lg 5$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4x-5}} = \frac{\lg 5}{\lg 125} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x-1}{4x-5} = \frac{1}{9}$$

$$9 \cdot (x-1) = 4x-5$$

$$x = 0,8$$

e) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 130$ Die Gleichung lässt sich umformen in:

$$4^x \cdot 4 + 4^x \cdot 4^{-2} = 130 \quad (\text{Potenzgesetze!})$$

$$4^x (4 \cdot 4^{-2}) = 130$$

$$4^x \cdot 4,0625 = 130$$

$$4^x = \frac{130}{4,0625} = 32 \quad | \lg$$

$$x \cdot \lg 4 = \lg 32 \quad | : \lg 4$$

$$x = 2,5$$

Lösungen: Aufgaben zu Linearen Ungleichungen

Aufgabe 1

$$\text{a) } 2x + 3(x + 2) > 6x + 3 \quad | \text{ Klammer auflösen} \quad \mathbf{G = R}$$

$$2x + 3x + 6 > 6x + 3 \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$5x + 6 > 6x + 3 \quad | -5x -3$$

$$3 > x$$

$$\mathbf{L = \{ x \mid x < 3 \} \text{ oder } L = [- \infty ; 3 [}$$

$$\text{b) } \frac{2-3x}{4x+5} > 0,5 \quad \mathbf{G = R \setminus \{ -5/4 \}}$$

Da bei der Äquivalenzumformung von Ungleichungen sich das Ungleichheitszeichen umdreht, wenn mit einem negativen Wert multipliziert wird, müssen die beiden Fälle

$$1. \quad 4x + 5 > 0 \quad \text{und} \quad 2. \quad 4x + 5 < 0$$

unterschieden werden. Im 2. Fall ($4x + 5 < 0$) wird bei der ersten Äquivalenzumformung mit einem negativen Wert multipliziert, also muss sich das Ungleichheitszeichen umdrehen.

1. Fall $4x + 5 > 0$
 $x > -5/4$

$$\frac{2-3x}{4x+5} > 0,5 \quad | \cdot (4x+5)$$

$$2-3x > 0,5(4x+5)$$

$$2-3x > 2x+2,5 \quad | +3x-2,5$$

$$-0,5 > 5x \quad | :5$$

$$-0,1 > x$$

$$L_1 = \{ x \mid -5/4 < x < -0,1 \} \quad \text{oder}$$

$$L_1 =] -5/4 ; -0,1 [$$

2. Fall $4x + 5 < 0$
 $x < -5/4$

$$\frac{2-3x}{4x+5} < 0,5 \quad | \cdot (4x+5)$$

$$2-3x < 0,5(4x+5)$$

$$2-3x < 2x+2,5 \quad | +3x-2,5$$

$$-0,5 < 5x \quad | :5$$

$$-0,1 < x$$

$$L_2 = \{ \}$$

Die im 2. Fall getroffene Annahme $x < -5/4$ schließt die Lösung $-0,1 < x$ aus.

c) $3(2x+4) \leq 6x+12$

$$6x+12 \leq 6x+12 \quad | -6x-12$$

$$0 \leq 0$$

$$G = R$$

L = R, die Ungleichung ist für alle x gültig

d) $\frac{8x-5}{5} \leq \frac{2x+5}{3} \quad | \cdot 15$

$$G = R$$

$$3(8x-5) \leq 5(2x+5)$$

$$24x-15 \leq 10x+25 \quad | -10x+15$$

$$14x \leq 40 \quad | :14$$

$$x \leq \frac{20}{7}$$

$$L = \left\{ x \mid x \leq \frac{20}{7} \right\} \quad \text{oder} \quad L = \left[-\infty ; \frac{20}{7} \right]$$

$$e) \frac{6 + 9x}{4 + 6x} < 0$$

$$G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

1. Fall $4 + 6x > 0$
 $x > -\frac{2}{3}$

$$\frac{6 + 9x}{4 + 6x} < 0 \quad | \cdot (4 + 6x)$$

$$6 + 9x < 0 \quad | -6$$

$$9x < -6 \quad | : 9$$

$$x < -\frac{2}{3}$$

$$L_1 = \{ \}$$

X kann nicht $> -\frac{2}{3}$ und gleichzeitig $< -\frac{2}{3}$

2. Fall $4 + 6x < 0$
 $x < -\frac{2}{3}$

$$\frac{6 + 9x}{4 + 6x} > 0 \quad | \cdot (4 + 6x)$$

$$6 + 9x > 0 \quad | -6$$

$$9x > -6 \quad | : 9$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

$$L_2 = \{ \}$$

Aufgabe 2

G = N **es dürfen nur positive ganze Zahlen eingesetzt werden**

x	Absatzmenge des Gutes
5x	variablen Kosten
180	fixe Kosten
10	Preis des Gutes
5x + 180	Kosten der Produktionsmenge
10x	Umsatz

Ein Gewinn wird erzielt, wenn der Umsatz des Gutes die Kosten der Produktion übersteigt.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Die gesuchte Gleichung lautet:} & 10x > 5x + 180 & | -5x \\
 & 5x > 180 & | : 5 \\
 & x > 36 &
 \end{array}$$

Ab einer Absatzmenge von 37 Stück erzielt das Unternehmen einen Gewinn.

Aufgabe 3

G = N es werden nur ganze Kilometer betrachtet

x Anzahl der Kilometer
 0,34 x Preis pro Kilometer ohne Bahn Card
 0,17x Preis pro Kilometer mit Bahn Card
 100 Preis Bahn Card (fixe Kosten)

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Die gesuchte Gleichung lautet:} & 0,34x > 100 + 0,17x & | -0,17x \\
 & 0,17x > 100 & | : 0,17 \\
 & x > 588,24 &
 \end{array}$$

Ab einer Bahnstrecke von 589 km ist es günstiger, sich vor Beginn der Zugreise eine Bahn Card zu kaufen.

Lösungen: Aufgaben Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

a) $g_1: 4x - 5y = 8$ und $g_2: -5x + 6,25y = 4$

1. g_1 auflösen nach x

$$\begin{array}{l}
 4x = 8 + 5y \\
 x = 2 + 5/4y
 \end{array}$$

2. Den für x berechneten Wert in g_2 einsetzen

$$\begin{array}{rcl}
 -5(2 + 5/4y) + 6,25y = 4 & & | \text{Klammer auflösen} \\
 -10 - 25/4y + 6,25y = 4 & & | +10 \\
 0 = 14 & &
 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung. $L = \{ \}$

b) $g_1: x + y = 3$ und $g_2: 2x - 2y = 14$

1. g_1 auflösen nach x

$$x = 3 - y$$

2. Den für x berechneten Wert in g_2 einsetzen

$$2(3 - y) - 2y = 14 \quad | \text{Klammer auflösen}$$

$$6 - 2y - 2y = 14 \quad | -6$$

$$-4y = 8 \quad | :4$$

$$y = -2$$

3. Wert y in $x = 3 - y$ einsetzen

$$x = 5$$

$$\mathbf{L = \{(5 | -2)\}}$$

Aufgabe 2

a) $g_1: x - 2y = 7$ und

$$g_2: \begin{array}{r} + \\ \hline 2x + 2y = 2 \\ 3x \quad = 9 \\ x \quad = 3 \end{array}$$

Den berechneten Wert für x in g_1 oder g_2 einsetzen

$$3 - 2y = 7 ; y = -2 \quad \mathbf{L = \{(3 | -2)\}}$$

b) $g_1: 2x + 3y = 1 \quad | \cdot 3$

$$g_2: 3x + 5y = 3 \quad | \cdot (-2)$$

$$g_1^*: 6x + 9y = 3$$

$$g_2^*: \begin{array}{r} + \\ \hline -6x - 10y = -6 \\ -y = -3 \\ y = 3 \end{array}$$

in g_1 (oder g_2) einsetzen

$$2x + 9 = 1$$

$$x = -4$$

$$L = \{(-4|3)\}$$

Aufgabe 3

a) $g_1: 8x - 6y = 5$ $g_2: 10x - 7,5y = 8$

Beide Gleichungen nach x (oder y) auflösen und gleichsetzen

$$\begin{array}{rcl} 8x - 6y = 5 & & 10x - 7,5y = 8 \\ 8x = 5 + 6y & & 10x = 8 + 7,5y \\ x = 5/8 + 3/4y & & x = 4/5 + 3/4y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5/8 + 3/4y = 4/5 + 3/4y \\ 0 = -7/40 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung. $L = \{ \}$

b) $g_1: 4x + 6y = 8$ $g_2: 5x + 7,5y = 10$

$$\begin{array}{rcl} 4x = 8 - 6y & & 5x = 10 - 7,5y \\ x = 2 - 3/2y & & x = 2 - 3/2y \end{array}$$

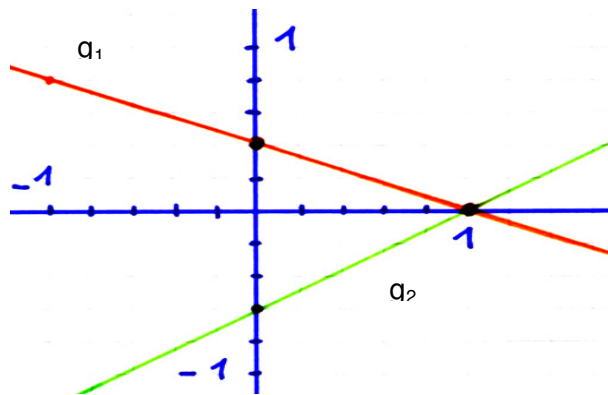
Das Gleichungssystem ist für y beliebig; $x = 2 - 3/2y$ oder x beliebig ; $y = -2/3x + 4/3$

Aufgabe 4

$g_1: 2x + 5y = 2$ und $g_2: 3x - 5y = 3$

Zunächst beide Gleichungen nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 5y = 2 - 2x & & 3x - 3 = 5y \\ y = -2/5x + 2/5 & & 3/5x - 3/5 = y \end{array}$$



$$L = (1|0)$$

Aufgabe 5

X Preis der ersten Flasche
Y Preis der zweiten Flasche

1. $\frac{3}{10}x + \frac{7}{10}y = 2$

2. $\frac{7}{10}x + \frac{3}{10}y = 2,2$

Beide Gleichungen nach x (oder y) auflösen und gleichsetzen

$$\frac{3}{10}x + \frac{7}{10}y = 2$$

$$\frac{7}{10}x + \frac{3}{10}y = 2,2$$

$$\frac{3}{10}x = 2 - \frac{7}{10}y$$

$$\frac{7}{10}x = 2,2 - \frac{3}{10}y$$

$$x = \frac{20}{3} - \frac{7}{3}y$$

$$x = \frac{22}{7} - \frac{3}{7}y$$

$$\frac{20}{3} - \frac{7}{3}y = \frac{22}{7} - \frac{3}{7}y$$

$$y = 1,85$$

In eine der beiden Gleichungen einsetzen : $x = 2,35$

Die erste Flasche kostet 2,35 Euro, die zweite Flasche 1,85 Euro.

Lösungen zu den Aufgaben elementare Finanzmathematik

Aufgabe 1

Herr K. hat Geld bei der Bank XY angelegt. Nach 5 Jahren beträgt sein Guthaben 14.140,00 €. Nach weiteren 3 Jahren beträgt es 17.567,00 €.

a) Welchen Zinssatz erhält er?

$$K_5 = K_0 = 14.140,95, K_3 = K_n = 17.567,26, n = 3$$

$$\begin{aligned}
p &= 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \\
&= 100 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{17.567,26}{14.140,95}} - 1 \right) \\
&= 100 \cdot (1,075 - 1) \\
&= 7,5
\end{aligned}$$

Er erhält 7,5% Zinsen

b) Wie viel Geld hat Herr K. damals angelegt

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{K_n}{q^n} = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \\
K_0 &= \frac{17567,26}{1,075^8} \\
K_0 &= \frac{17.567,26}{1,78347} \\
K_0 &= 9.850,00 \text{ Euro}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bei einer Bank werden 37.100 € angelegt. Nach 8 Jahren werden sie auf 53.983,84 € angewachsen sein. Geben Sie die Exponentialfunktion an, die das Anwachsen der Spareinlage beschreibt.

$$K_n = 37.100 \cdot (1 + p/100)^8$$

Wie hoch ist der Zinssatz in Prozent?

$$\begin{aligned}
p &= 100 \cdot \left(\sqrt[8]{\frac{53.983,84}{37.100,00}} - 1 \right) \\
&= 100 \cdot (1,048 - 1) \\
&= 4,8
\end{aligned}$$

Der Zinssatz beträgt 4,8%

$$K_n = 37.100 \cdot (1,048)^8$$

Aufgabe 3

Sie legen ein Guthaben zu 4% Zinsen pro Jahr an. Wann hat sich Ihr Guthaben verdreifacht?

K_0 = Guthaben zu Beginn; n = Anzahl der Jahre; $p = 4\%$

$$K_0 (1 + 0,04)^n = 3 \cdot K_0 \quad | : K_0$$

$$1,04^n = 3 \quad | \text{Logarithmieren}$$

$$n \log 1,04 = \log 3$$

$$n = \frac{\log 3}{\log 1,04} = 28,011..$$

Nach 29 Jahren wird sich das Guthaben verdreifacht haben.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ nach n auf.

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot q^n \quad | : K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = q^n \quad | \text{Logarithmieren}$$

$$\log \frac{K_n}{K_0} = n \cdot \log q \quad | : \log q$$

$$\frac{\log K_n - \log K_0}{\log q} = n$$